IFT503/711 – Théorie du calcul

Université de Sherbrooke

Devoir 1

Enseignant:	Michael Blondin
Date de remise:	lundi 19 janvier 2025 à 13h29
À réaliser:	en équipe de deux (ou individuellement) au 1er cycle individuellement aux cycles supérieurs
Modalités:	remettre en ligne sur Turnin
Pointage:	sur 40 points au 1er cycle (+ 4pts bonus pour ★) sur 50 points aux cycles supérieurs

Question 1.
Soit le langage $L = \{uu : u \in \{a, b\}^*\}$.

(a) Décrivez textuellement une approche afin de décider L avec une machine de Turing *standard*, donc à *un seul ruban*. Par exemple, elle doit accepter $abbabb$ et refuser $abbab$. 3 pts

(b) Donnez une machine de Turing standard sous forme de diagramme qui décide L (en utilisant votre approche). Si vous utilisez des abréviations que nous n'avons pas utilisées en classe, veuillez les décrire. Vous ne pouvez *pas* utiliser les primitives de haut niveau vues en classe qui exploitent plusieurs rubans. 5 pts

(c) Donnez les six premières configurations de votre machine à partir de l'entrée $abbabb$. 1 pt

(d) Analysez le temps d'exécution asymptotique de votre machine. 3 pts

Question 2.
Considérons la tâche suivante:

Entrée:	$w \in \{0, 1\}^*$
Sortie:	w renversé

(a) Décrivez textuellement une approche afin d'accomplir cette tâche avec une machine de Turing *standard*, donc à *un seul ruban*. Par exemple, sur entrée $w = 01101$, la machine devrait se terminer avec 10110 sur son ruban, suivi d'*aucun* symbole non blanc, puis se déplacer dans l'état acceptant afin d'indiquer qu'elle a terminé (il n'y a pas de notion de rejet ici). 3 pts

(b) Donnez une machine de Turing standard sous forme de diagramme qui accomplit cette tâche (en utilisant votre approche). Si vous utilisez des abréviations que nous n'avons pas utilisées en classe, veuillez les décrire. Vous ne pouvez *pas* utiliser les primitives de haut niveau vues en classe qui exploitent plusieurs rubans. 5 pts

(c) Donnez les six premières configurations de votre machine à partir de l'entrée 01101. 1 pt

(d) Expliquez pourquoi il serait plus simple d'accomplir cette tâche avec *deux* rubans. 3 pts

Question 3. 8 pts

Décrivez une machine de Turing (à un ou plusieurs ruban) qui détermine si une expression booléenne évalue à *vrai* ou *faux*. Nous supposons que l'expression est codée sur l'alphabet $\Sigma = \{(,), \wedge, \vee, \neg, 0, 1\}$ où 0 correspond à *faux* et 1 correspond à *vrai*. Vous n'avez *pas* à valider l'entrée; supposez qu'elle respecte cette grammaire:

$$\varphi ::= (\varphi \wedge \varphi) \mid (\varphi \vee \varphi) \mid (\neg\varphi) \mid 0 \mid 1$$

Par exemple, votre machine devrait accepter l'entrée « $((0\wedge 1)\vee((\neg 0)\wedge 1))$ ».

La description de votre machine peut mélanger texte et diagrammes (partiels ou complets), dans la mesure où elle est claire. Vous pouvez utiliser les primitives de haut niveau vues en classe.

Question 4. 8 pts

Dans le but de montrer que l'alphabet de ruban est une commodité plutôt qu'une nécessité, montrez que toute machine de Turing standard $\mathcal{M}$ avec alphabet d'entrée $\{0, 1\}$ peut être simulée par une machine de Turing à deux rubans $\mathcal{M}'$ dont

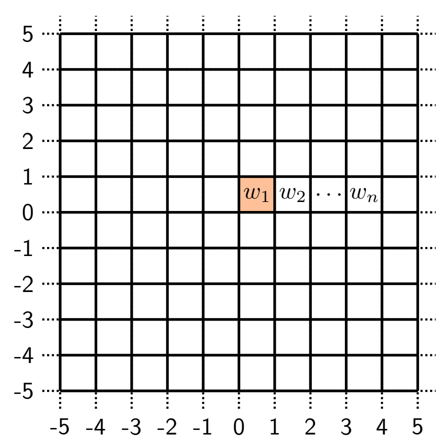
— l'alphabet d'entrée est $\{0, 1\}$,
— l'alphabet de ruban est $\{0, 1, \sqcup\}$, et
— la fonction de transition n'écrit jamais le symbole blanc « $\sqcup$ ».

Par exemple, si l'alphabet de ruban de $\mathcal{M}$ est $\{0, 1, \sqcup, \$, \#, a, b\}$, alors $\mathcal{M}'$ doit simuler $\mathcal{M}$ sans écrire les lettres $\{\sqcup, \$, \#, a, b\}$. Nous entendons par « simuler » le fait que $\mathcal{M}'$ reconnaisse le même langage que $\mathcal{M}$.

Vous pouvez utiliser tout ce qui a été vu en classe. Assurez-vous que votre description soit clairement implémentable (par ex. un·e collègue sceptique devrait trouver votre description convaincante).

★ Question 5. (cycles supérieurs) ★ 10 pts

Une *machine de Turing bidimensionnelle* est une variante de machine de Turing dont le ruban est une grille 2D infinie dans toutes les directions. Ainsi, sa fonction de transition est de la forme $\delta\colon Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{\mathsf{G}, \mathsf{D}, \mathsf{H}, \mathsf{B}\}$ où H et B dénotent respectivement les nouvelles directions « haut » et « bas ». Initialement, une telle machine reçoit son entrée w sur la ligne 0 à partir de la colonne 0, le reste des cellules contiennent le symbole blanc, et son unique tête de lecture/écriture se trouve à la position $(0, 0)$:



Montrez que ce modèle de calcul possède la *même expressivité* que la machine de Turing standard, c.-à-d. que les deux modèles peuvent reconnaître les mêmes langages. Vous pouvez décrire vos arguments et constructions comme cela vous convient, pourvu que vos descriptions soient clairement implémentables (à nouveau, pensez à convaincre un·e collègue sceptique).