IFT503/711 – Théorie du calcul

Université de Sherbrooke

Devoir 6

Enseignant:	Manuel Lafond
Date de remise:	jeudi 16 avril avant 23h59
À réaliser:	individuellement ou à deux au 1^{er} cycle individuellement aux cycles supérieurs
Modalités:	à remettre électroniquement via turnin
Pointage:	sur 40 points au 1^{er} cycle (+ 5pts bonus) sur 50 points aux cycles supérieurs

Question 1.

Commencez par quelques petites questions d'échauffement. Vous pouvez utiliser sans preuve tous les résultats vus en classe.

(a) Rappelons que $\mathsf{EXPTIME} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} DTIME(2^{n^k})$. Montrez que $\mathsf{PSPACE} \subseteq \mathsf{EXPTIME}$. 3 pts

(b) Montrez que le langage MAJSAT du devoir 3 est dans PSPACE. 3 pts

(c) Montrez que si $\mathsf{PSPACE} \subseteq \mathsf{P}$, alors $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$. 3 pts

(d) On définit $\mathsf{coNPSPACE} = \{L : \overline{L} \in \mathsf{NPSPACE}\}$. Montrez que $\mathsf{coNPSPACE} = \mathsf{NPSPACE}$. 3 pts

Question 2.

(a) La taille $|\phi|$ d'une formule booléenne ϕ est le nombre de caractères requis pour la décrire. Chaque variable x_i ou $\overline{x}_i$ compte pour un caractère, ainsi que les symboles $\vee, \wedge, ($ et $)$. Par exemple, la formule $\phi = (x_1 \vee \overline{x}_2) \wedge x_3$ a une taille de $|\phi| = 7$. Deux formules ϕ_1 et ϕ_2 sont *équivalentes* si elles utilisent les mêmes variables $x_1, \ldots, x_n$ et si les deux formules sont satisfaites par exactement le même ensemble d'assignations. Montrez que le langage suivant est dans PSPACE: 7 pts

$$\text{MIN-FORMULA} = \{\phi : \text{ il n'existe pas de formule } \phi' \text{ équivalente à } \phi \text{ telle que } |\phi'| < |\phi|\}.$$

(b) Vous devez sortir d'un stationnement chaotique. Chaque voiture est à l'horizontale ou à la verticale et peut avancer ou reculer. Nous sommes à l'horizontale et on veut atteindre une case spécifiée. 7 pts

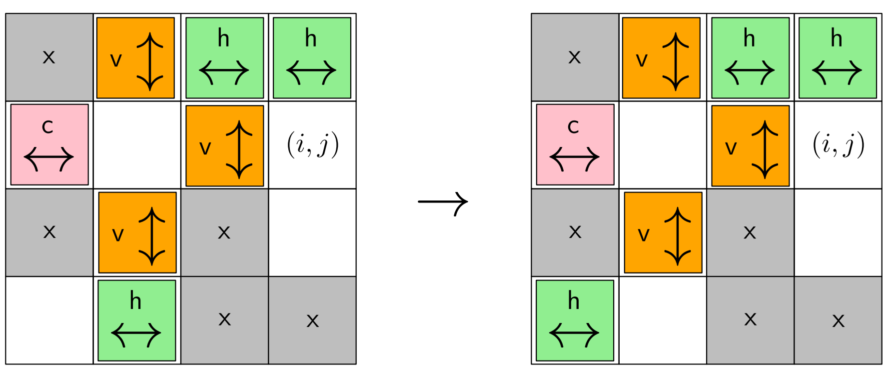

FIGURE 1 – Un exemple de déplacement légal, ici horizontal. Est-ce que c peut aller à la case (i, j)?

Formellement, on a une matrice M de dimension $n \times n$ dans laquelle chaque cellule contient une valeur parmi $\{\mathsf{c}, \mathsf{h}, \mathsf{v}, \mathsf{x}, \textvisiblespace\}$. Un déplacement consiste à prendre une voiture et la déplacer sur une case voisine vide, dans la direction de la voiture. Plus spécifiquement, un déplacement impliquant deux cellules (i, j) et (i', j') est légal si:

— $M_{i,j} \in \{\mathsf{c}, \mathsf{h}\}$, $M_{i',j'} = \textvisiblespace$ et $(i', j') \in \{(i, j-1), (i, j+1)\}$; ou

— $M_{i,j} = \mathsf{v}$, $M_{i',j'} = \textvisiblespace$ et $(i', j') \in \{(i-1, j), (i+1, j)\}$.

On écrit $M \to M'$ s'il existe une séquence de déplacements légaux qui transforme M en M'. Le langage correspondant est:

$$\text{GET-OUT} = \{\langle M, i, j\rangle : \text{il existe } M' \text{ telle que } M \to M' \text{ et } M'_{i,j} = \mathsf{c}\}$$

Montrez que GET-OUT est dans PSPACE.

(c) Le problème TQBF présenté en classe supposait une alternance des quantificateurs. En réalité, ce n'est pas exigé. C'est-à-dire, une formule quantifiée peut avoir le même quantificateur plusieurs fois de façon consécutive, par exemple 7 pts

$$\exists x_1 \exists x_2 \forall x_3 \forall x_4 \forall x_5 \exists x_6 \ (x_1 \vee \overline{x}_2) \wedge (x_3 \vee x_4 \vee \overline{x}_5) \wedge (x_6 \vee \overline{x}_6)$$

Soit TQBF-GEN l'ensemble des formules booléennes quantifiées qui n'ont pas nécessairement d'alternance entre les quantificateurs, et TQBF qui a cette alternance. Donnez une réduction montrant que TQBF-GEN $\leq_P$ TQBF.

Question 3.

Dans cette question, nous utilisons l'hypothèse ETH (Exponential Time Hypothesis). Rappellons que cette hypothèse stipule que 3-SAT ne peut pas être décidé en temps $2^{o(n)} poly(n)$, avec n le nombre de variables et où $poly(n)$ représente un polynôme quelconque. 7 pts

Avant la relâche, nous avons montré que SET-COVER est NP-difficile avec une réduction f en temps polynomial de 3-SAT vers SET-COVER. Il s'avère que cette réduction donne aussi des bornes inférieures pour SET-COVER sous la ETH.

Montrez que si la ETH est vraie, alors SET-COVER ne peut pas être décidé en temps $2^{o(m)} poly(m)$, où ici m représente de nombre d'ensembles de l'instance.

★ Question 4. (cycles supérieurs)

Dans le langage GG (pour Géographie-Généralisée) vu en cours, deux joueurs doivent construire un chemin sur un graphe orienté et les sommets ne peuvent pas être réutilisés. Un joueur a perdu si, à son tour, il n'y a plus de sommet disponible pour prolonger le chemin à partir du sommet courant. 10 pts

Considérez la variante GG-ARC, dans laquelle les sommets peuvent être réutilisés, mais pas les arcs [1]. Donc, étant donné un graphe orienté G et un sommet de départ $v \in V(G)$, deux joueurs doivent construire un chemin P à partir de v, en y ajoutant à chaque tour un nouvel arc. Un joueur a perdu s'il n'y a plus d'arc sortant disponible à partir du dernier sommet de P. Notez que les sommets peuvent être réutilisés.

Le langage GG-ARC contient les couples $\langle G, v \rangle$ tels que le joueur 1 a une stratégie gagnante sur G lorsque $v \in V(G)$ est le sommet de départ. Montrez que GG-ARC est PSPACE-complet.

Note. Je suggère d'utiliser la construction pour GG vue en classe. Vous pouvez vous référer à cette construction sans la décrire. Si vous la modifiez, vous pouvez décrire les modifications à appliquer (par exemple, je tolère "on prend la construction pour GG, mais on change [XYZ]").

1. Dans un graphe orienté, un arc est une arête avec une direction. On dénote par (u, v) l'arc qui va de u vers v.