IFT503/711 – Théorie du calcul
Université de Sherbrooke

Examen fictif pour étude

Enseignants: Michael Blondin, Manuel Lafond, Dave Touchette
Date: —
Durée: 1h50

Directives:

— Répondez aux questions dans le **cahier de réponses**, pas sur ce questionnaire;

— **Deux feuilles** de notes au format 8½" × 11" sont permises;

— Donnez **une seule réponse** par sous-question;

— L'examen comporte **trois (3) questions** sur **deux (2) pages** valant un total de **30 points**;

— La correction se base notamment sur la **clarté**, l'**exactitude** et la **concision** de vos réponses, ainsi que sur la **justification** pour les questions qui en requièrent une.

Cet « examen » est un exemple qui combine des questions d'examens antérieurs. Les trois thématiques seront les mêmes, et l'esprit de l'examen sera le même, mais la forme exacte des questions varie d'année en année. Les questions s'inspirent respectivement des trois derniers devoirs.

Question 1: logique et calcul parallèle

Vous n'avez pas à montrer que vos familles de circuits sont uniformes, mais elles doivent l'être.

(a) Donnez un automate A qui représente l'ensemble des solutions de la formule de Presburger $\varphi(x, y) \coloneqq (y = \lfloor x/2 \rfloor)$ sous le codage binaire du chapitre 5 et du devoir 4 (bits les moins significatifs à gauche). 4 pts

(b) Montrez que ce problème appartient à AC^0: 3 pts

<u>TRIBIN</u>

ENTRÉE: $x \in \{0, 1\}^+$ (une suite non vide de bits)

QUESTION: x est triée en ordre croissant?

Par exemple, nous avons $001 \in$ TRIBIN, $011 \in$ TRIBIN, $000 \in$ TRIBIN, $1011 \notin$ TRIBIN et $11100 \notin$ TRIBIN.

(c) Considérons ce problème qui appartient à FAC^0: 3 pts

<u>MAX</u>

ENTRÉE: deux nombres binaires x et y avec le même nombre de bits

SORTIE: $\max(x, y)$

Expliquez pourquoi ce problème appartient à NC^2 (ou à NC pour la moitié des points):

<u>EST-MAX</u>

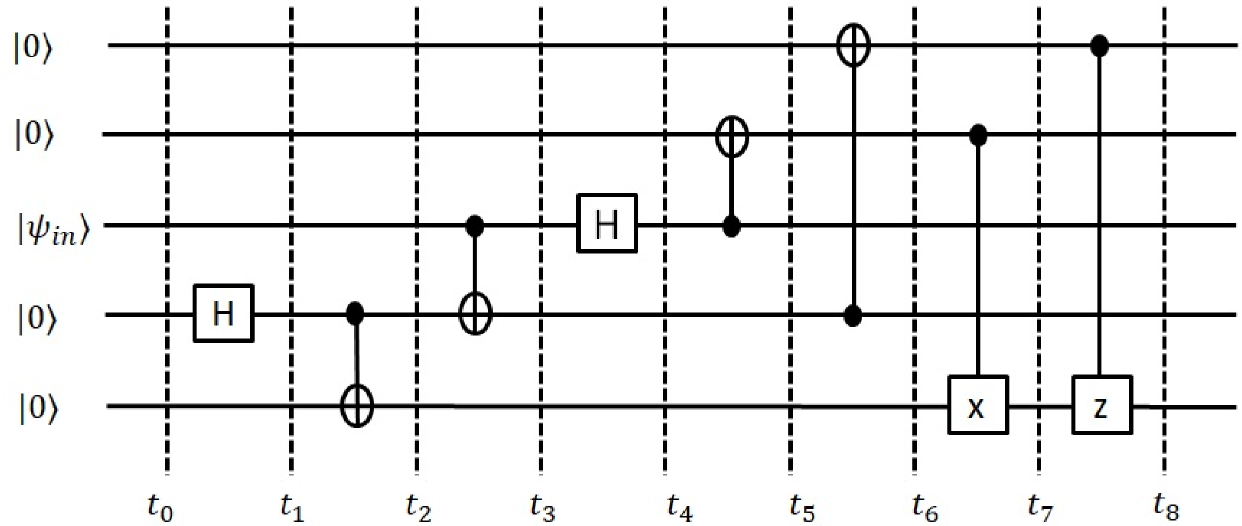
ENTRÉE: une suite de nombres binaires $x_1, x_2, \ldots, x_k, y$ avec le même nombre de bits

QUESTION: $\max(x_1, x_2, \ldots, x_k) = y$?

Remarque: k n'est pas une constante, il s'agit de suites de taille arbitraire.

Question 2: informatique quantique

Soit le circuit suivant, avec $|\psi_{in}\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$.



(a) Quels sont les états $|\psi_0\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_4\rangle, |\psi_6\rangle, |\psi_8\rangle$ aux temps t_0, t_2, t_4, t_6, t_8, respectivement, en fonction des amplitudes α, β de $|\psi_{in}\rangle$? Montrez votre calcul. 8 pts

(b) Pouvez-vous réécrire l'état $|\psi_8\rangle$ comme $|\phi_{14}\rangle \otimes |\phi_5\rangle$ avec $|\phi_{14}\rangle$ l'état des 4 qubits du haut et $|\phi_5\rangle$ l'état du qubit du bas ? Si oui, quel est $|\phi_5\rangle$ en fonction de α, β ? 1 pt

(c) Donnez une interprétation de ce circuit. 1 pt

Il pourrait également y avoir une question sur BQP vs. les autres classes de langages vues dans le cours.

Question 3: complexité en espace

Note: il n'y aura pas de question sur le temps exponentiel et la ETH.

(a) Montrez que co-NP $\subseteq$ PSPACE. 2.5 pts

Rappel: un langage L est dans co-NP si son complément $\overline{L} = \Sigma^* \setminus L$ est dans NP.

(b) Dans le jeu de la satisfaisabilité, on a en entrée une formule booléenne ϕ (il n'y a *pas* de quantificateurs). Deux joueurs jouent chacun leur tour. À son tour, le joueur 1 choisit une variable de ϕ et lui assigne $vrai$ ou $faux$. Cette variable demeure assignée pour le reste du jeu. Le joueur 2 choisit à son tour une variable non-assignée et lui assigne $vrai$ ou $faux$. Le jeu continue jusqu'à ce que toutes les variables soient assignées. Le joueur 1 gagne si l'assignation finale rend la formule vraie, et le joueur 2 gagne sinon. 7.5 pts

Montrez que le problème de décider si le joueur 1 peut toujours gagner sur une formule ϕ donnée est dans PSPACE.