IFT503/711 – Théorie du calcul

Université de Sherbrooke

Examen fictif pour étude

Enseignants: Michael Blondin, Manuel Lafond, Dave Touchette

Date: —

Durée: 1h50

Directives:

— Répondez aux questions dans le **cahier de réponses**, pas sur ce questionnaire;

— **Deux feuilles** de notes au format 8½″ × 11″ sont permises;

— Donnez **une seule réponse** par sous-question;

— L'examen comporte **trois (3) questions** sur **deux (2) pages** valant un total de **30 points**;

— La correction se base notamment sur la **clarté**, l'**exactitude** et la **concision** de vos réponses, ainsi que sur la **justification** pour les questions qui en requièrent une.

Cet ≪ examen ≫ est un exemple qui combine des questions d'examens antérieurs. Les trois thématiques seront les mêmes, et l'esprit de l'examen sera le même, mais la forme exacte des questions varie d'année en année. Les questions s'inspirent respectivement des trois premiers devoirs.

Question 1: calculabilité

Soit ce langage sur alphabet $\Sigma \coloneqq \{a, b, c\}$:

$$L \coloneqq \{a^n b^n c^n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Par exemple, $aabbcc \in L$, $aabcc \notin L$ et $aaccbb \notin L$.

(a) Donnez le diagramme (avec états et transitions) d'une machine de Turing à *un seul* ruban qui décide L. Vous ne pouvez pas utiliser de macro de haut niveau, mais vous pouvez supposer que l'entrée débute par \$. Afin d'alléger le diagramme, ne tracez pas les transitions vers l'état rejetant. 7 pts

(b) Quel est le temps d'exécution asymptotique de votre machine? Est-il possible d'obtenir un meilleur temps en utilisant plusieurs rubans? Justifiez. 3 pts

Question 2: décidabilité

(a) Si $A \leq_m B$ et B est un langage fini , i.e., $|B| = n \in \mathbb{N}$, est-ce que ça implique que A est un langage fini ? Justifiez votre réponse. 3 pts

(b) Soit le langage $K = \{w : w = a2b, \text{ pour } a \in HALT_{TM}, b \in \overline{HALT_{TM}}\ \}$ sur alphabet $\Sigma = \{0, 1, 2\}$. Montrez que ni K ni $\bar{K}$ n'est Turing-reconnaissable. 4 pts

(c) Est-ce qu'il est vrai que pour toute paire de langages A et B, il existe un langage C tel que $C \leq_m A$ et $C \leq_m B$? Justifiez votre réponse. 3 pts

Question 3: P versus NP

(a) Vrai ou faux: si NP $\setminus$ P est non-vide, alors SAT $\notin$ P. Justifiez votre réponse. 2.5 pts

(b) Soit ϕ une formule booléenne. On dénote par $\mathcal{V}(\phi)$ l'ensemble des variables qui apparaissent dans ϕ (par exemple, $x_1, x_2, \ldots, x_n$). De plus, on dénote par $\mathcal{A}(\phi)$ l'ensemble des assignations de $\mathcal{V}(\phi)$ qui satisfont ϕ. Soit le langage 7.5 pts

$$\text{DIFF-SAT} = \{\langle \phi, \psi \rangle : \phi \text{ et } \psi \text{ sont des formules booléennes telles que } \mathcal{V}(\phi) = \mathcal{V}(\psi) \text{ et } \mathcal{A}(\phi) \neq \mathcal{A}(\psi)\}.$$

Montrez que DIFF-SAT est NP-complet.
Suggestion. Réduction via SAT. Notez que $\phi \in$ SAT si et seulement si $\mathcal{A}(\phi) \neq \emptyset$.