IFT503/711 - Exercices sur P et NP

Manuel Lafond

Exercice 1

Un langage L est dans co-NP si le complément $\overline{L}$ de L est dans NP (le complément de L est l'ensemble des mots qui ne sont pas dans L).

Montrez que P $\subseteq$ NP $\cap$ co-NP.

Exercice 2

Soit $L \in$NP. Montrez qu'il existe une constante k telle que $L \in DTIME(2^{n^k})$, où n représente la taille de l'entrée.

Exercice 3

Un langage A est co-NP-complet si $A \in$ co-NP, et si, pour chaque langage $B \in$ co-NP, $B \leq_P A$.

Montrez qu'un langage L est NP-complet si et seulement si $\overline{L}$ est co-NP-complet.

Exercice 4

Montrez que $A_{NTM} = \{\langle M, x\rangle : M$ encode une MT non-déterministe qui accepte $x\}$ est NP-difficile.

Indice : réduisez 3-SAT à A_{NTM}. C'est facile, mais seulement une fois qu'on connaît la solution.

Exercice 5

Soit $EXPTIME = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} DTIME(2^{n^k})$. Montrez que $NP \subseteq EXPTIME$.

Exercice 6

Dans le problème de la couverture minimum, on reçoit des ensembles, et on veut choisir un minimum de ces ensembles pour couvrir tous les éléments. Plus formellement, soit $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_n\}$ une collection d'ensembles, et soit U un ensemble qu'on appelle *l'univers*. Le langage correspondant au problème de la couverture minimum est le suivant :

$$\text{SET-COVER} = \{\langle \mathcal{S}, U, k\rangle : \text{il existe } \mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S} \text{ tel que } |\mathcal{S}'| \leq k \text{ et } \textstyle\bigcup_{S \in \mathcal{S}'} S = U\}$$

Montrez que SET-COVER est NP-complet.

Exercice 7

Dans un graphe, un sous-ensemble de sommets $X \subseteq V(G)$ est *dominant* si chaque sommet de $V(G) \setminus X$ a au moins un voisin dans X. Considérez le langage

$$\begin{aligned}\text{DOM-SET} = \{\langle G, k\rangle : & G \text{ est un graphe dans lequel il existe} \\ & \text{un ensemble dominant } X \subseteq V(G) \text{ de taille } k \text{ ou moins}\}\end{aligned}$$

Montrez que DOM-SET est NP-complet.

Exercice 8

Une collection d'ensembles $\{S_1, \ldots, S_\ell\}$ est dite *disjointe* si, pour tout i, j avec $1 \leq i < j \leq \ell$, on a $S_i \cap S_j = \emptyset$. Dans le problème SET-PACKING, on reçoit une collection d'ensembles $\mathcal{S}$ et on doit choisir une sous-collection disjointe de taille maximum. En terme de langage, on a :

$$\text{SET-PACKING} = \{\langle \mathcal{S}, k\rangle : \text{il existe une sous-collection } \mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S} \text{ disjointe telle que } |\mathcal{S}'| \geq k\}$$

Montrez que SET-PACKING est NP-complet.

Exercice 9

Soit G un graphe. Un *arbre couvrant* de G est un sous-graphe G' de G tel que G' est un arbre connectant tous les sommets de G. Dans le problème MINDEG-AC, on veut savoir s'il existe un arbre couvrant dont le degré maximum ne dépasse pas k :

$$\begin{aligned}\text{MINDEG-AC} = \{\langle G, k\rangle : & G \text{ est un graphe dans lequel il existe un arbre} \\ & \text{couvrant tel que chaque sommet a un maximum de } k \text{ voisins}\}\end{aligned}$$

Montrez que MINDEG-AC est NP-complet.

Suggestion : dans un graphe un cycle Hamiltonien est une cycle qui passe exactement une fois par chaque sommet. Le langage $\{G : G \text{ a un cycle hamiltonien}\}$ est NP-complet.

Exercice 10

Dans le problème 2-SAT, on reçoit une formule ϕ en forme CNF dans laquelle chaque clause a deux variables. On veut savoir si ϕ est satisfaisable. Montrez que 2-SAT est dans P.

Exercice 11

Dans le problème MAX-2-SAT, on reçoits un ensemble de clauses CNF avec chacune deux variables, et on veut en satisfaire un maximum. En terme de langage, on a

$$\text{MAX-2-SAT} = \{\langle C, k\rangle : C \text{ est un ensemble de clauses CNF, et il existe}$$
$$\text{une assigntion qui en satisfait au moins } k\}$$

Montrez que MAX-2SAT est NP-complet.
Suggestion : ce n'est pas trivial ! Une réduction à partir de MAX-2-XOR est possible.