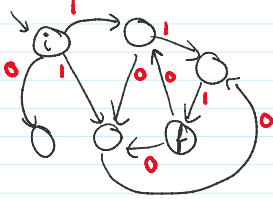


PSPACE (suite)

PSPACE = NPSPACE

- Utile pour montrer $L \in PSPACE$, car on peut montrer $L \in NPSPACE$.
- ex: AFN = automate fini non-déterministe



$AFN_{inter} = \{ \langle A, B \rangle : A, B \text{ sont des AFN tels qu'il existe } w \in \Sigma^* \text{ accepté par } A \text{ et } B \}$

$AFN_{inter} \in PSPACE$

idée (manche pas): pour chaque mot w // Pb: $|w|$ pas poly

```
if (si A et B acceptent w)
  return true
else
  return false
```

À la place, on cherche w dans l'intersection de façon non-déterministe:

espace sur entrée $\langle A, B \rangle$:

$O(|A|)$ $S_A \leftarrow$ état init. de A // $|A| = \# \text{ états}$
 $O(|B|)$ $S_B \leftarrow$ état init. de B

while true

$O(1)$ $c \leftarrow$ symbole de Σ choisi de façon non-déterministe

$O(|A|)$ $S_A \leftarrow$ état suivant S_A sur caractère c choisi de façon non-dét.

$O(|B|)$ $S_B \leftarrow$ état suivant S_B sur c , façon non-dét.

$O(|A|+|B|)$ si S_A et S_B sont acceptants accepter $\langle A, B \rangle$

Le langage de cette MT non-dét est $\langle A, B \rangle$ avec intersection non-vide?

- si $\langle A, B \rangle \in AFN_{inter}$, alors il y a w dans l'inter. et on va parcourir les caractères de w par non-dét. et atteindre un état acceptant pour A et B.
- si $\langle A, B \rangle \notin AFN_{inter}$, on ne tombera jamais sur un double-état acceptant pour A et B.

L'espace requis pour cet algo est $O(|A|+|B|)$, et

L'espace requis pour cet algo est $O(|A|+|B|)$, et donc $AFN_{inter} \in NPSPACE$.
 Par Savitch, $AFN_{inter} \in PSPACE$. ■

Pour $L \in PSPACE$:

- ① Force brute sur les sols possibles (SAT)
- ② Algo récursif, avec arbre de récursion ($NP \subseteq PSPACE$) de prof. bornée et mémoire bornée à chaque appel. (bornée = polynomial)
 ↳ famille en prof.
- ③ $L \in NPSPACE$ (AFN_{inter})

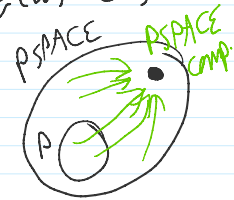
PSPACE-complétude

• Un langage L est PSPACE-complet si:

$L \in PSPACE$

$\forall L' \in PSPACE, L' \leq_p L$ ($\exists f$ en temps poly $w \in L' \Leftrightarrow f(w) \in L$)

• \leq_p : si on avait un algo temps poly pour un langage PSPACE-complet, alors on pourrait décider tout langage de PSPACE en temps poly.



TQBF: true quantified boolean formula

Formules avec alternance de quantificateurs

ex: $\exists x_1, \forall x_2, \exists x_3, \forall x_4 (x_1 \vee \bar{x}_2) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_2 \vee \bar{x}_3)$

J1: satisfaire la formule
 J2: pas satisfaire

J1: $x_1 = T$ J2: $x_2 = F$
 J3: $x_3 = F$ J4: $x_4 = F$

$x_1 = T$ mène à J2 gagné

J1: $x_1 = F$ J2: $x_2 = T$

$J1: x_1 = F$ $J2: x_2 = T$
gagne

TQBF = $\{ \varphi : \varphi \text{ une formule quantifiée qui est vraie} \}$
 $\exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 \dots \forall x_n \Psi$
 où Ψ est une formule booléenne

Thm: TQBF est PSPACE-complet

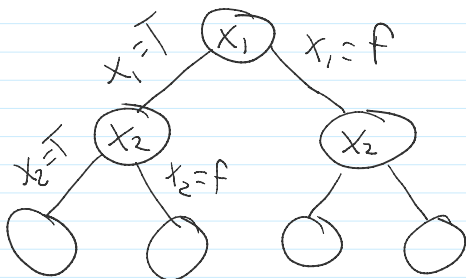
1) TQBF \in PSPACE

2) TQBF est PSPACE difficile
[exercice]



Soit φ une instance de TQBF. Premier/dernier quantif. peuvent être \exists, \forall

$\varphi = \exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 \dots \forall x_n \Psi$ ou $\varphi = \forall x_1 \exists x_2 \dots \forall x_n \Psi$



$\exists x_1 \forall x_2 (x_1 \vee \bar{x}_2)$
 $\varphi_1 = \forall x_2 (true \vee \bar{x}_2)$
 $\varphi_2 = \forall x_2 (false \vee \bar{x}_2)$

$t_{qbf}(\varphi)$

si φ n'a pas de \exists, \forall
retourner la valeur de vérité de Ψ

si φ commence par $\exists x_1 [\varphi']$
soit $\varphi_1 =$ ce qu'on obtient en posant $x_1 = T$ dans φ'

$res_1 = t_{qbf}(\varphi_1)$

soit $\varphi_2 =$ poser $x_1 = F$ dans φ'

$res_2 = t_{qbf}(\varphi_2)$

return $res_1 \vee res_2$

si φ commence par $\forall x_1$
 $\varphi_1 =$ poser $x_1 = T$ dans φ'
 $\varphi_2 =$ poser $x_1 = F$ dans φ'

$res_1 = t_{qbf}(\varphi_1)$

$res_2 = t_{qbf}(\varphi_2)$

...

Cet algo crée un arbre de récursion où

- la profondeur est $O(n)$
 $n = \# \text{ variables}$

- la profondeur est $O(n)$
 $n = \# \text{ variables}$
- l'espace par appel est $O(n)$
(copies de φ)
- Espace total: $O(\text{prof} \times \text{appel})$

$\text{res}_2 = \text{tgbf}(\varphi_2)$

return $\text{res}_1 \wedge \text{res}_2$

$$O(n \cdot n) = O(n^2) \Rightarrow \text{TQBF} \in \text{PSPACE}$$