

Réductions

DBL-SAT = $\{ \varphi : \text{il existe au moins 2 assignations distinctes qui satisfont } \varphi \}$

Thm: DBL-SAT est NP-complet

① DBL-SAT \in NP. Deux assignations A_1 et A_2 qui sat. φ peuvent servir de cert. f.
On peut vérifier chacune en temps $O(|\varphi|)$.

② DBL-SAT est NP-diff: cible.

On montre SAT \leq_p DBL-SAT.

$$\varphi \xrightarrow{f} \varphi'$$

Soit φ une instance de SAT.

On pose $\varphi' = \varphi \wedge (z \vee \bar{z})$, où z est une nouvelle var. pas dans φ .

\Rightarrow Soit A une assign. qui sat. φ .

Alors $A + (z=T)$ et $A + (z=F)$ satisfont φ' .

\Leftarrow Soit A_1 et A_2 des assign. qui sat. φ' .

En particulier, A_1 satisfait φ , peu importe z .

Donc $\varphi \in$ SAT.

SUBSET-SUM = $\{ \langle S, k \rangle : S \text{ est un ensemble d'entiers encodés en binaire, } k \text{ aussi t.g.} \}$

il existe $S' \subseteq S$ avec
 $\sum_{s \in S'} s = k$
↑
somme cible

ex: $S = \{1, 8, 14, 15\}$ $k = 30$ $S' = \{1, 14, 15\}$

SUBSET-SUM est NP-complet.

① \in NP. On prend $S' \subseteq S$ avec $\sum_{s \in S'} s = k$ comme cert. f.

$$\begin{array}{l} s \in S' \\ s = 2^{15} \end{array}$$

.. + 11 + . 0 - - 1 + 0.

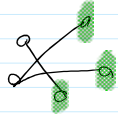
① $\in NP$. On prend $S' = \{s\}$ avec $\sum_{s \in S'} s = k$ comme certificat.

On peut additionner les $s \in S'$ en temps linéaire par rapport au # de bits requis pour leur encodage.

② est NP-difficile.

Réduction via IND-SET. ($\langle G, k \rangle$: G a un ens indep $|I| = k$)

Soit $\langle G, k \rangle$ une instance de IND-SET.



• On transforme $\langle G, k \rangle$ en $\langle S, t \rangle$ une instance de SUBSET-SET.

• On numérote les arêtes $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$

• Pour chaque $u \in V(G)$, on ajoute à S l'entier

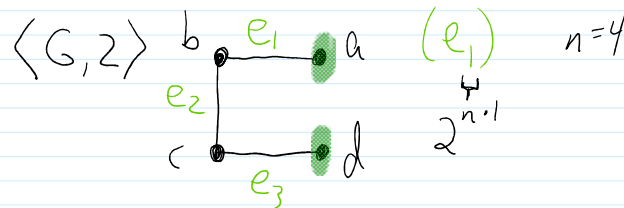
$$s_u = \left(\sum_{e_i: u \in e_i} 2^{n \cdot i} \right) + 1, \text{ où } n = |V(G)|$$

• Pour chaque $e_i \in E(G)$, on ajoute aussi

$$s_{e_i} = 2^{n \cdot i}$$

• On pose $t = \left(\sum_{i=1}^m 2^{n \cdot i} \right) + k$

• $\langle S, t \rangle$ peut être construit en temps poly car les valeurs exponentielles prennent un # de bit polynomial par rapport à $|V(G)|$ et $|E(G)|$.



s_a	0000	0000	0000	0001
s_b	0000	0001	0001	0001
s_c	0001	0001	0000	0001
s_d	0001	0000	0000	0001
s_{e_1}	0000	0000	0000	0000
s_{e_2}	0000	0001	0000	0000
s_{e_3}	0001	0000	0000	0000
t	0001	0000	0001	0010

$k=2$

À montrer: $\langle G, k \rangle \in \text{IND-SET} \Leftrightarrow \langle S, t \rangle$ admet $S' \subseteq S$ avec $\sum_{s \in S'} s = t$.

\Rightarrow Soit I un ens. indep. de G avec $|I| = k$.

On choisit dans S' d'abord le sous-ensemble $\{s_u : u \in I\}$.

De cette façon, le dernier groupe de n bits sera égal à k et une partie de $(n \cdot i)$ -ème bits seront à 1. Puisque I est indépendant, aucun autre bit ne sera à 1.

Pour atteindre t , on ajoute les s_{e_i} nécessaires.

\Leftarrow Supposons qu'il $\exists S' \subseteq S$ avec $\sum_{s \in S'} s = t$.

Soit $I = \{u : s_u \in S' \text{ et } u \in V(G)\}$

Puisque S' atteint t avec le dernier groupe de n bits à k , il faut que $|I| = k$.

De plus, $\forall u, v \in I$, s_u et s_v n'ont pas de bit commun à 1 (sauf le dernier).

Par construction, ceci veut dire que u et v ne partagent pas d'arête et donc I est indépendant. 

SET-COVER = $\{ \langle S, U, k \rangle : S \text{ est une collection d'ensembles t.g.} \\ \exists S' \subseteq S \text{ avec } \bigcup S' = U \text{ et } |S'| = k \}$

$$\exists S' \subseteq S \text{ avec } \bigcup_{S_i \in S'} S_i = U \text{ et } |S'| = k$$

ex: $S = \{ \{1,2\}, \{2,3,4\}, \{1,3,5\} \}$ $U = \{1,2,3,4,5\}$ $k=2$

$$S' = \{ \{2,3,4\}, \{1,3,5\} \}$$

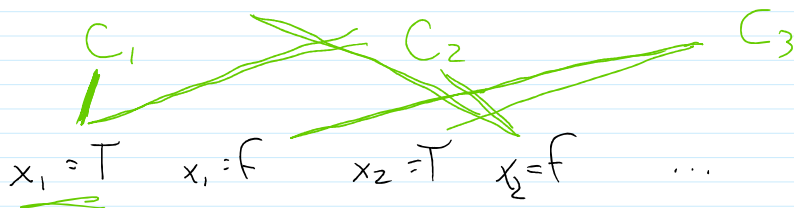
SET-COVER est NP-complet.

① \in NP. On utilise $S' \subseteq S$ comme certificat. Il est de vérifier que $|S'| = k$ et $\bigcup_{S_i \in S'} S_i = U$.

② est NP-difficile.

Réduction via 3-SAT.

$$\varphi = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_1) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_1)$$



$$\varphi \xrightarrow{f} \langle S, U, k \rangle$$

Soit C_1, C_2, \dots, C_m les clauses de φ

+

Soit C_1, C_2, \dots, C_m les clauses de φ
 et x_1, x_2, \dots, x_n ses variables.

On définit $U = \{ C'_1, C'_2, \dots, C'_m, x'_1, x'_2, \dots, x'_n \}$

$$S = \{ S_1, \bar{S}_1, S_2, \bar{S}_2, \dots, S_n, \bar{S}_n \}$$

$\begin{matrix} \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ x_1=T & x_1=F & x_2=T & x_2=F \end{matrix}$

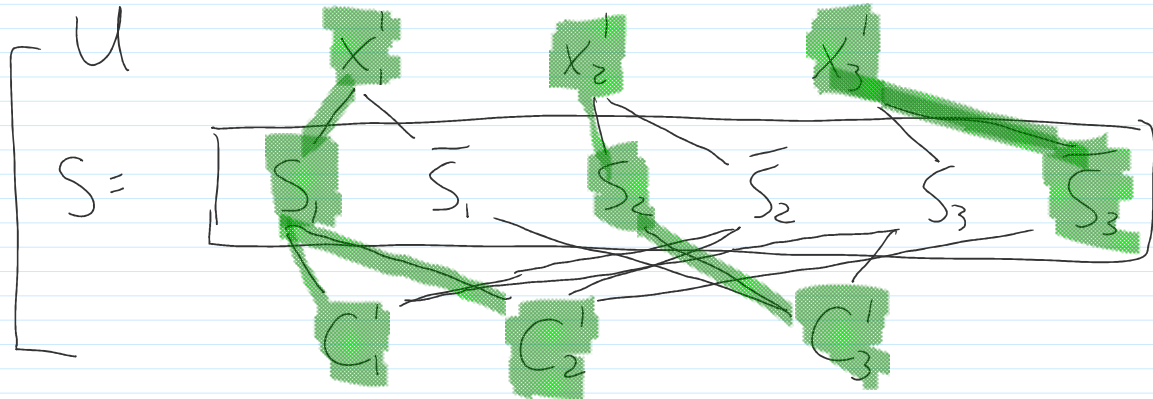
où $\forall i=1, \dots, n$

$$S_i = \{ x'_i \} \cup \{ C'_j : x_i=T \text{ satisfait } C_j \}$$

$$\bar{S}_i = \{ x'_i \} \cup \{ C'_j : x_i=F \text{ satisfait } C_j \}$$

$$\varphi = \overset{C_1}{(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)} \wedge \overset{C_2}{(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_1)} \wedge \overset{C_3}{(x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_1)}$$

$x_1=T \qquad \qquad \qquad x_2=T \qquad x_3=f$



arête = contient

$$k=3$$

On pose $k=n$.

On pose $k = n$.

On peut construire $\langle S, U, k \rangle$ en temps $\text{poly}(|\varphi|)$.

$\varphi \in 3\text{-SAT} \Leftrightarrow \langle S, U, k \rangle \in \text{SET-COVER}$

\Rightarrow Soit A une assign. que satisfait φ .

Soit $S' = \{ S_i : x_i = T \text{ dans } A \} \cup \{ \bar{S}_i : x_i = F \text{ dans } A \}$

Alors : $|S'| = n = k$ car A assigne un de $x_i = T$ ou F à chaque $i = 1..n$

- Tous les x_i sont couverts par la m[^]e raison.
- Tous les C_i sont couverts par S' car A satisfait chaque clause.

Donc $\langle S, U, k \rangle \in \text{SET-COVER}$

\Leftarrow Soit $S' \subseteq S$ qui couvre tout avec $|S'| = k = n$.

Puisque $|S'| = n$, et qu'il faut couvrir chaque x_i , il faut choisir un de chaque S_i ou \bar{S}_i (pas les deux).

On satisfait φ avec l'assignation

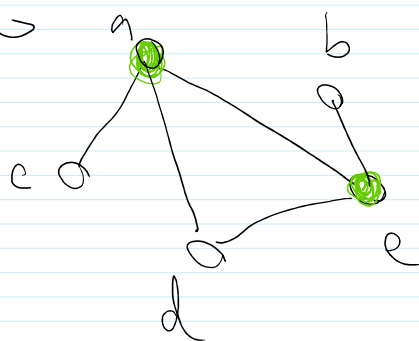
$$x_i = T \Leftrightarrow S_i \in S'$$

Cette assignation satisfait chaque clause car chaque C_i est couvert. \square

VERTEX-COVER

Soit G un graphe. On dit que $X \subseteq V(G)$ est une couverture par sommets (vertex cover) si: $\forall uv \in E(G)$, on a $u \in X$ ou $v \in X$.
(ou les deux)

ex: G



$\{a, e\}$ est un vertex-cover.

$k=2$

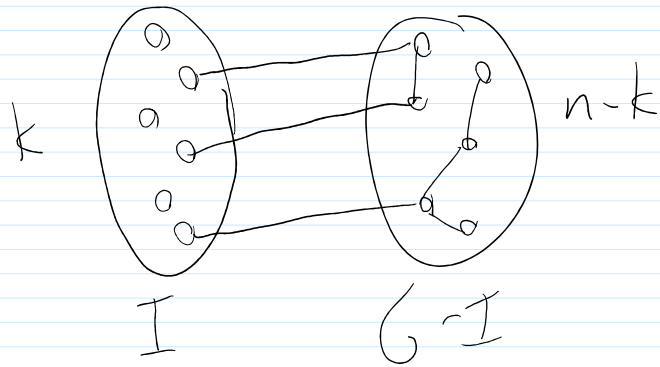
$\{b, d, c, e\}$ aussi

VERTEX-COVER = $\{ \langle G, k \rangle : G \text{ contient un vertex cover de taille } k \}$

Théorème: Un graphe G a un ensemble indep. de taille k

\Leftrightarrow

G a un vertex-cover de taille $n-k$.



VERTEX-COVER est NP-complet

① \in NP. Exercice.

② est NP-difficile.

Réduction via IND-SET.

$\langle G, k \rangle \text{ IND-SET} \xrightarrow{f} \langle G, n-k \rangle \text{ VERTEX-COVER}$

Par le Thm, G a un ens. indep de taille $k \Leftrightarrow G$ a un vertex-cover de taille $n-k$

$\langle G, k \rangle \in \text{IND-SET} \Leftrightarrow \langle G, n-k \rangle \in \text{VERTEX-COVER}$