

Protocoles de population

Club-Info

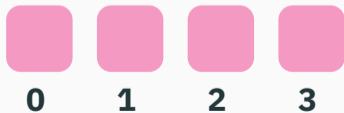
Benjamin Courchesne

26 mars 2025

Université de Sherbrooke - Département d'informatique

Protocoles de population

- Agents anonymes disposant de peu de ressources,
- Les agents se posent une question sur la population,
- Changement d'état via des interactions aléatoires par paire,
- Chaque agent a une opinion binaire (vrai ou faux),
- Stabilisation des agents sur une certaine opinion.



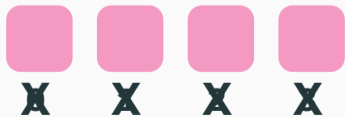
Protocoles de population

- Agents anonymes disposant de peu de ressources,
- Les agents se posent une question sur la population,
- Changement d'état via des interactions aléatoires par paire,
- Chaque agent a une opinion binaire (vrai ou faux),
- Stabilisation des agents sur une certaine opinion.



Protocoles de population

- Agents anonymes disposant de peu de ressources,
- Les agents se posent une question sur la population,
- Changement d'état via des interactions aléatoires par paire,
- Chaque agent a une opinion binaire (vrai ou faux),
- Stabilisation des agents sur une certaine opinion.



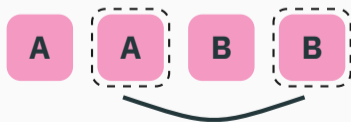
Protocoles de population

- Agents anonymes disposant de peu de ressources,
- Les agents se posent une question sur la population,
- Changement d'état via des interactions aléatoires par paire,
- Chaque agent a une opinion binaire (vrai ou faux),
- Stabilisation des agents sur une certaine opinion.



Protocoles de population

- Agents anonymes disposant de peu de ressources,
- Les agents se posent une question sur la population,
- Changement d'état via des interactions aléatoires par paire,
- Chaque agent a une opinion binaire (vrai ou faux),
- Stabilisation des agents sur une certaine opinion.



Protocoles de population

- Agents anonymes disposant de peu de ressources,
- Les agents se posent une question sur la population,
- Changement d'état via des interactions aléatoires par paire,
- Chaque agent a une opinion binaire (vrai ou faux),
- Stabilisation des agents sur une certaine opinion.



Protocoles de population

- Agents anonymes disposant de peu de ressources,
- Les agents se posent une question sur la population,
- Changement d'état via des interactions aléatoires par paire,
- Chaque agent a une opinion binaire (vrai ou faux),
- Stabilisation des agents sur une certaine opinion.



Protocoles de population

- Agents anonymes disposant de peu de ressources,
- Les agents se posent une question sur la population,
- Changement d'état via des interactions aléatoires par paire,
- Chaque agent a une opinion binaire (vrai ou faux),
- Stabilisation des agents sur une certaine opinion.



Protocoles de population

- Agents anonymes disposant de peu de ressources,
- Les agents se posent une question sur la population,
- Changement d'état via des interactions aléatoires par paire,
- Chaque agent a une opinion binaire (vrai ou faux),
- Stabilisation des agents sur une certaine opinion.



Exemple : protocole de majorité

Il y a plus de carrés **bleus** que **rouges**?



Règles :

- Deux gros carrés de couleurs différentes deviennent petits.
- Un gros carré convertit un petit carré à sa couleur.

Exemple : protocole de majorité

Il y a plus de carrés **bleus** que **rouges**?



Règles :

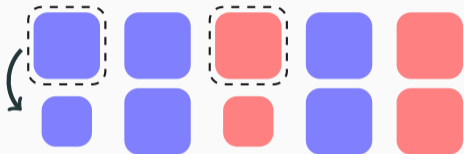
- Deux gros carrés de couleurs différentes deviennent petits.
- Un gros carré convertit un petit carré à sa couleur.

Exemple : protocole de majorité

Il y a plus de carrés **bleus** que **rouges**?

Règles :

- Deux gros carrés de couleurs différentes deviennent petits.
- Un gros carré convertit un petit carré à sa couleur.

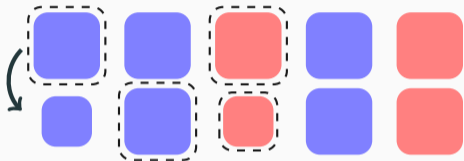


Exemple : protocole de majorité

Il y a plus de carrés **bleus** que **rouges**?

Règles :

- Deux gros carrés de couleurs différentes deviennent petits.
- Un gros carré convertit un petit carré à sa couleur.

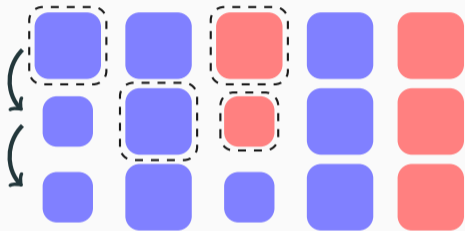


Exemple : protocole de majorité

Il y a plus de carrés **bleus** que **rouges**?

Règles :

- Deux gros carrés de couleurs différentes deviennent petits.
- Un gros carré convertit un petit carré à sa couleur.

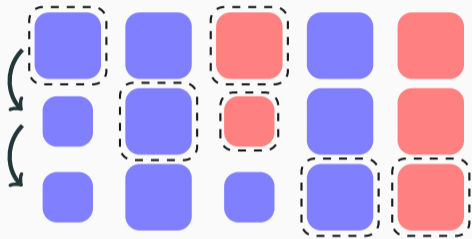


Exemple : protocole de majorité

Il y a plus de carrés **bleus** que **rouges**?

Règles :

- Deux gros carrés de couleurs différentes deviennent petits.
- Un gros carré convertit un petit carré à sa couleur.

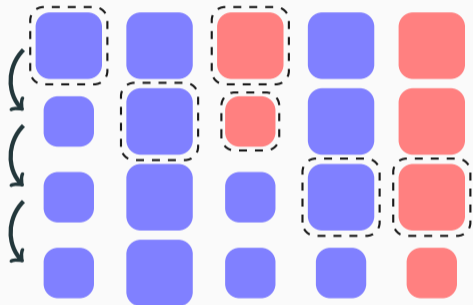


Exemple : protocole de majorité

Il y a plus de carrés **bleus** que **rouges**?

Règles :

- Deux gros carrés de couleurs différentes deviennent petits.
- Un gros carré convertit un petit carré à sa couleur.

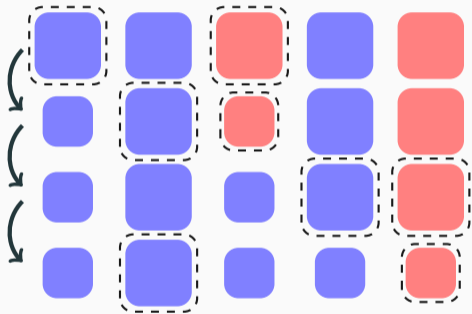


Exemple : protocole de majorité

Il y a plus de carrés **bleus** que **rouges**?

Règles :

- Deux gros carrés de couleurs différentes deviennent petits.
- Un gros carré convertit un petit carré à sa couleur.

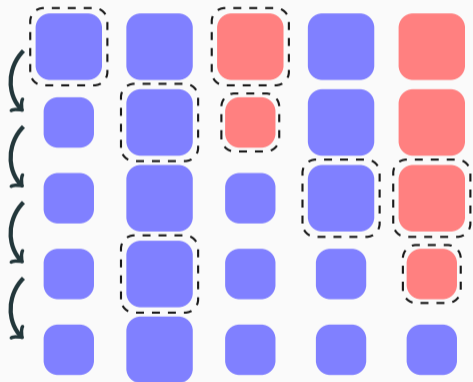


Exemple : protocole de majorité

Il y a plus de carrés **bleus** que **rouges**?

Règles :

- Deux gros carrés de couleurs différentes deviennent petits.
- Un gros carré convertit un petit carré à sa couleur.



DÉMONSTRATION

Peregrine

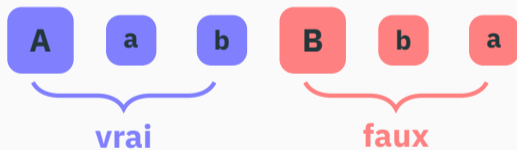
Protocoles de population : Définitions

- États : un ensemble fini Q
- Fonction de sortie : $O: Q \rightarrow \{\text{vrai, faux}\}$
- États initiaux : $I \subseteq Q$
- Transitions : $T \subseteq Q^2 \times Q^2$



Protocoles de population : Définitions

- États : un ensemble fini Q
- Fonction de sortie : $O: Q \rightarrow \{\text{vrai}, \text{faux}\}$
- États initiaux : $I \subseteq Q$
- Transitions : $T \subseteq Q^2 \times Q^2$



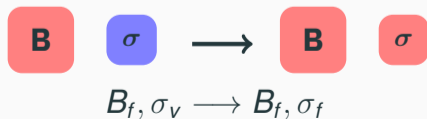
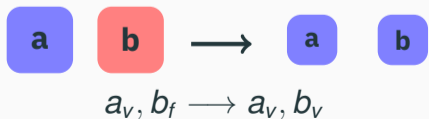
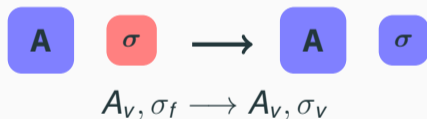
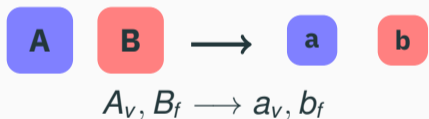
Protocoles de population : Définitions

- États : un ensemble fini Q
- Fonction de sortie : $O: Q \rightarrow \{\text{vrai, faux}\}$
- États initiaux : $I \subseteq Q$
- Transitions : $T \subseteq Q^2 \times Q^2$



Protocoles de population : Définitions

- États : un ensemble fini Q
- Fonction de sortie : $O: Q \rightarrow \{\text{vrai, faux}\}$
- États initiaux : $I \subseteq Q$
- Transitions : $T \subseteq Q^2 \times Q^2$



Protocoles de population : Définitions

Pour éviter un biais, une contrainte est imposée ; les agents sont soumis à un ordonnanceur équitable qui détermine les agents qui interagiront.

Protocoles de population : Définitions

Pour éviter un biais, une contrainte est imposée ; les agents sont soumis à un ordonnanceur équitable qui détermine les agents qui interagiront.



Protocoles robustes

- Capteur défectueux?
- Changement de valeur initiale?

Protocoles robustes

- Capteur défectueux?
- Changement de valeur initiale?

Comment?

Exemple majorité robuste

Règles $\#A \geq \#B$?

- (1) $A_v, B_f \longrightarrow a_v, b_f$
- (2) $A_v, b_f \longrightarrow A_v, b_v$
- (3) $B_f, a_v \longrightarrow B_f, a_f$



Exemple majorité robuste

Règles $\#A \geq \#B$?

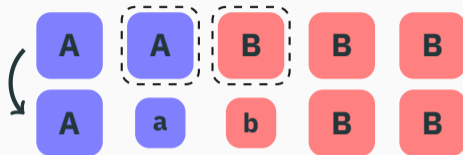
- (1) $A_v, B_f \longrightarrow a_v, b_f$
- (2) $A_v, b_f \longrightarrow A_v, b_v$
- (3) $B_f, a_v \longrightarrow B_f, a_f$



Exemple majorité robuste

Règles $\#A \geq \#B$?

- (1) $A_v, B_f \longrightarrow a_v, b_f$
- (2) $A_v, b_f \longrightarrow A_v, b_v$
- (3) $B_f, a_v \longrightarrow B_f, a_f$



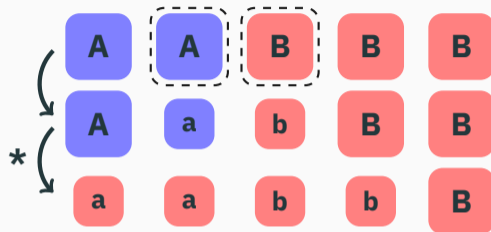
Exemple majorité robuste

Règles $\#A \geq \#B$?

(1) $A_v, B_f \longrightarrow a_v, b_f$

(2) $A_v, b_f \longrightarrow A_v, b_v$

(3) $B_f, a_v \longrightarrow B_f, a_f$

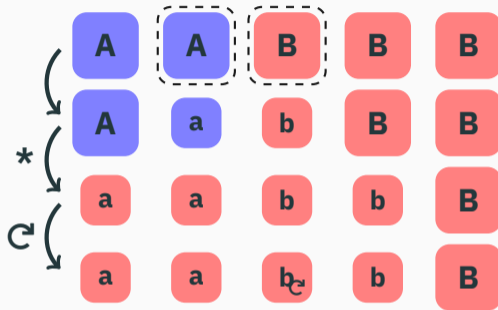


Exemple majorité robuste

Règles $\#A \geq \#B$?

- (1) $A_v, B_f \longrightarrow a_v, b_f$
- (2) $A_v, b_f \longrightarrow A_v, b_v$
- (3) $B_f, a_v \longrightarrow B_f, a_f$

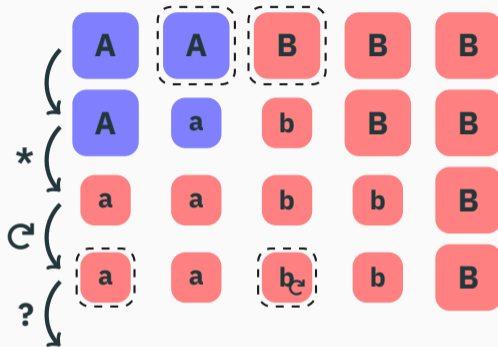
QUOI !!



Exemple majorité robuste

Règles $\#A \geq \#B$?

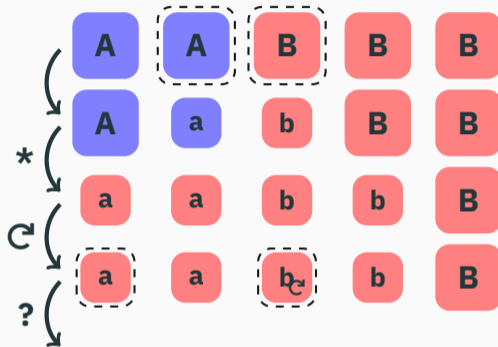
- (1) $A_v, B_f \longrightarrow a_v, b_f$
- (2) $A_v, b_f \longrightarrow A_v, b_v$
- (3) $B_f, a_v \longrightarrow B_f, a_f$



Exemple majorité robuste

Règles $\#A \geq \#B$?

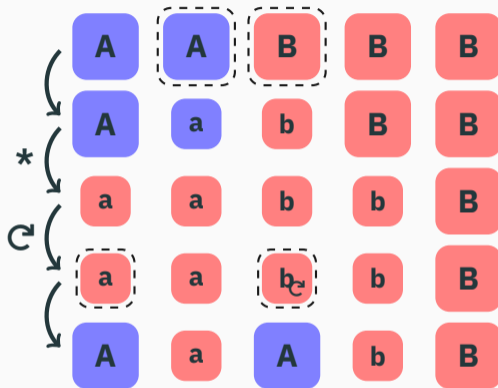
- (1) $A_v, B_f \longrightarrow a_v, b_f$
- (2) $A_v, b_f \longrightarrow A_v, b_v$
- (3) $B_f, a_v \longrightarrow B_f, a_f$
- (4) $A_c, \sigma \longrightarrow B_f, \sigma$
- (5) $B_c, \sigma \longrightarrow A_v, \sigma$
- (6) $a_c, b_* \longrightarrow B_v, B_v$
- (7) $b_c, a_* \longrightarrow A_v, A_v$



Exemple majorité robuste

Règles $\#A \geq \#B?$

- (1) $A_v, B_f \longrightarrow a_v, b_f$
- (2) $A_v, b_f \longrightarrow A_v, b_v$
- (3) $B_f, a_v \longrightarrow B_f, a_f$
- (4) $A_c, \sigma \longrightarrow B_f, \sigma$
- (5) $B_c, \sigma \longrightarrow A_v, \sigma$
- (6) $a_c, b_* \longrightarrow B_v, B_v$
- (7)** $b_c, a_* \longrightarrow A_v, A_v$



Exemple majorité robuste

Règles $\#A \geq \#B$?

$$(2) A_v, b_f \longrightarrow A_v, b_v$$

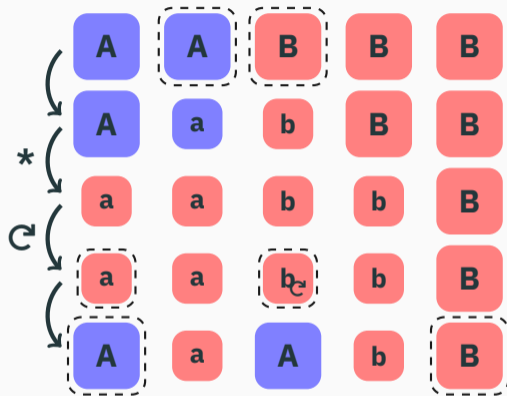
$$(3) B_f, a_v \longrightarrow B_f, a_f$$

$$(4) A_c, \sigma \longrightarrow B_f, \sigma$$

$$(5) B_c, \sigma \longrightarrow A_v, \sigma$$

$$(6) a_c, b_* \longrightarrow B_v, B_v$$

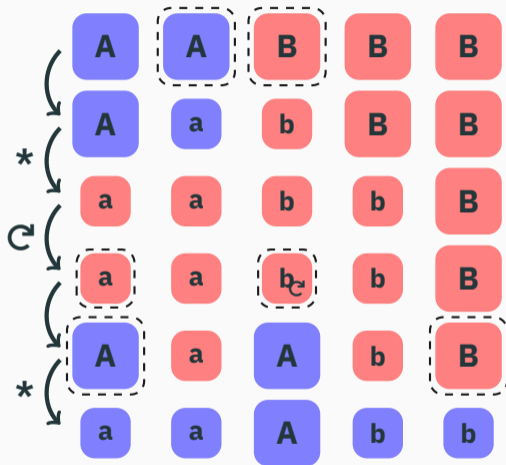
$$(7) b_c, a_* \longrightarrow A_v, A_v$$



Exemple majorité robuste

Règles $\#A \geq \#B$?

- (1) $A_v, B_f \longrightarrow a_v, b_f$
- (2) $A_v, b_f \longrightarrow A_v, b_v$
- (3) $B_f, a_v \longrightarrow B_f, a_f$
- (4) $A_c, \sigma \longrightarrow B_f, \sigma$
- (5) $B_c, \sigma \longrightarrow A_v, \sigma$
- (6) $a_c, b_* \longrightarrow B_v, B_v$
- (7) $b_c, a_* \longrightarrow A_v, A_v$



Exemple majorité robuste

Règles $\#A \geq \#B$?

(1) $A_v, B_f \longrightarrow a_v, b_f$

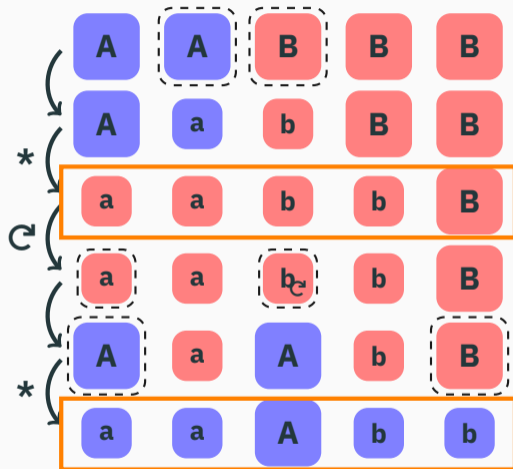
(3) $B_f, a_v \longrightarrow B_f, a_f$

(4) $A_c, \sigma \longrightarrow B_f, \sigma$

(5) $B_c, \sigma \longrightarrow A_v, \sigma$

(6) $a_c, b_* \longrightarrow B_v, B_v$

(7) $b_c, a_* \longrightarrow A_v, A_v$



Que peut-on exprimer exactement ?

- $\geq b$ agents **bleus**
- **Bleu** $>$ Rouge
- **Bleu** $\geq 2 \times$ Rouge
- (**Bleu** + Rouge) \geq Vert
- ...

Prédicats de seuil

$$\sum_{i=1}^n a_i P(\sigma_i) \leq c$$

- **Bleu** est pair
- (**Bleu** + Rouge) $\equiv 3 \pmod{5}$
- ...

Prédicats modulaires

$$\sum_{i=1}^n a_i P(\sigma_i) \equiv b \pmod{c}$$

Extension

Que peut-on calculer exactement? \Rightarrow Expressions semi-linéaires

- $\geq b$ agents **bleus**
- **Bleu** > Rouge
- **Bleu** $\geq 2 \times$ Rouge
- (**Bleu** + Rouge) \geq Vert
- ...

Prédicats de seuil

$$\sum_{i=1}^n a_i P(\sigma_i) \leq c$$

- **Bleu** est pair
- (**Bleu** + Rouge) $\equiv 3 \pmod{5}$
- ...

Prédicats modulaires

$$\sum_{i=1}^n a_i P(\sigma_i) \equiv b \pmod{c}$$

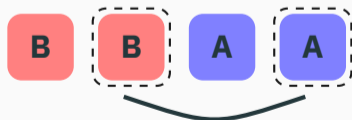
Protocoles ordonnés

Et si les agents avaient un ordre ?



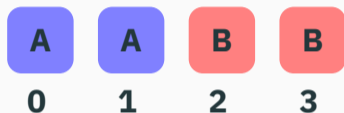
⇒ Un agent peut savoir si l'autre a un ordre plus grand que lui.

$$A, B \xrightarrow{<} a, b$$



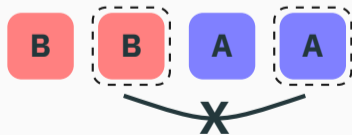
Protocoles ordonnés

Et si les agents avaient un ordre ?



⇒ Un agent peut savoir si l'autre a un ordre plus grand que lui.

$$A, B \xrightarrow{<} a, b$$



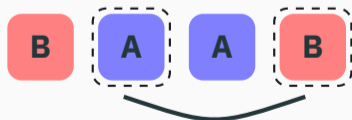
Protocoles ordonnés

Et si les agents avaient un ordre ?



⇒ Un agent peut savoir si l'autre a un ordre plus grand que lui.

$$A, B \xrightarrow{<} a, b$$



Protocoles ordonnés

Et si les agents avaient un ordre ?

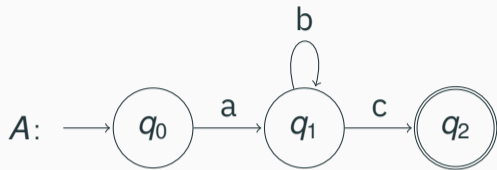


⇒ Un agent peut savoir si l'autre a un ordre plus grand que lui.

$$A, B \xrightarrow{<} a, b$$

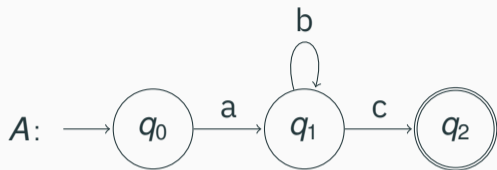


Exemple Protocole ordonné (PPO)



$$L(A) = ab^*c$$

Exemple Protocole ordonné (PPO)

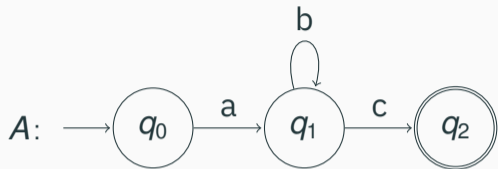


$$L(A) = ab^*c$$

Construction du *PPO* selon $\overline{L(A)}$:

- (1) Ne commence pas par la lettre a ,
- (2) Ne se termine pas par la lettre c ,
- (3) Il existe un autre caractère que b entre a et c .

Exemple Protocole ordonné (PPO)



$$L(A) = ab^*c$$

Construction du *PPO* selon $\overline{L(A)}$:

- (1) Ne commence pas par la lettre a , $\sigma, a \xrightarrow{<} \perp, \perp$
- (2) Ne se termine pas par la lettre c , $c, \sigma \xrightarrow{<} \perp, \perp$
- (3) Il existe un autre caractère que b entre a et c . déjà couvert.

Pour $\sigma \in \{a, b, c\}$.

Exemple Protocole ordonné (PPO)

- (1) $\sigma, a \xrightarrow{<} \perp, \perp$
- (2) $c, \sigma \xrightarrow{<} \perp, \perp$ pour $\sigma \in \{a, b, c\}$
- (3) $\sigma, \perp \longrightarrow \perp, \perp$

a b c c

a b b c

Exemple Protocole ordonné (PPO)

- (1) $\sigma, a \xrightarrow{<} \perp, \perp$
- (2) $c, \sigma \xrightarrow{<} \perp, \perp$ pour $\sigma \in \{a, b, c\}$
- (3) $\sigma, \perp \longrightarrow \perp, \perp$

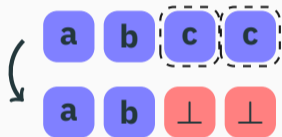


Exemple Protocole ordonné (PPO)

(1) $\sigma, a \xrightarrow{\leq} \perp, \perp$

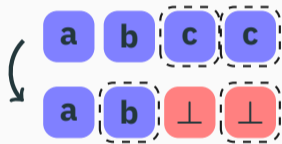
(2) $c, \sigma \xrightarrow{\leq} \perp, \perp$ pour $\sigma \in \{a, b, c\}$

(3) $\sigma, \perp \longrightarrow \perp, \perp$



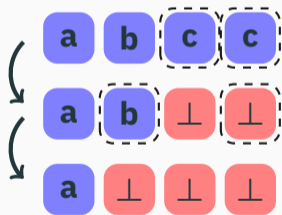
Exemple Protocole ordonné (PPO)

- (1) $\sigma, a \xrightarrow{<} \perp, \perp$
- (2) $c, \sigma \xrightarrow{<} \perp, \perp$ pour $\sigma \in \{a, b, c\}$
- (3) $\sigma, \perp \longrightarrow \perp, \perp$



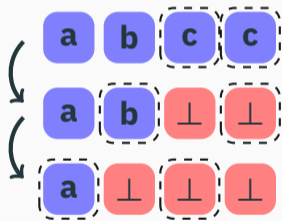
Exemple Protocole ordonné (PPO)

- (1) $\sigma, a \xrightarrow{<} \perp, \perp$
- (2) $c, \sigma \xrightarrow{<} \perp, \perp$ pour $\sigma \in \{a, b, c\}$
- (3) $\sigma, \perp \longrightarrow \perp, \perp$



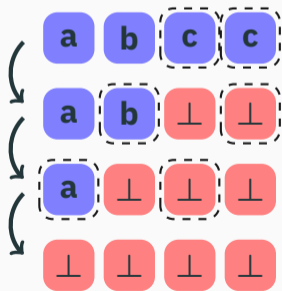
Exemple Protocole ordonné (PPO)

- (1) $\sigma, a \xrightarrow{<} \perp, \perp$
- (2) $c, \sigma \xrightarrow{<} \perp, \perp$ pour $\sigma \in \{a, b, c\}$
- (3) $\sigma, \perp \longrightarrow \perp, \perp$

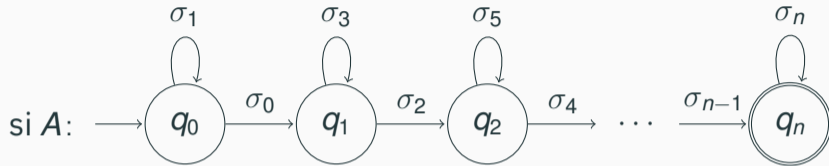


Exemple Protocole ordonné (PPO)

- (1) $\sigma, a \xrightarrow{\leq} \perp, \perp$
- (2) $c, \sigma \xrightarrow{\leq} \perp, \perp$ pour $\sigma \in \{a, b, c\}$
- (3) $\sigma, \perp \longrightarrow \perp, \perp$

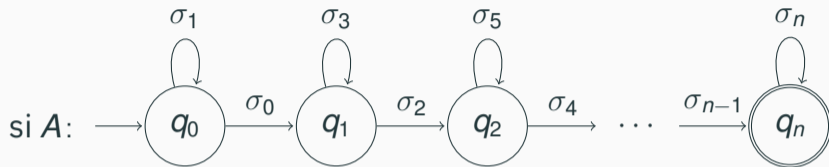


Généralisation des PPO



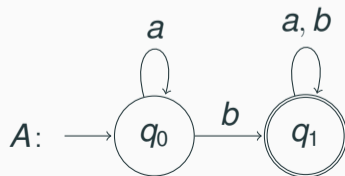
Comment généraliser ?

Généralisation des PPO

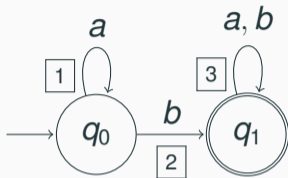


Comment généraliser ?

Exemple pour $L(A) = a^*b(a + b)^*$:

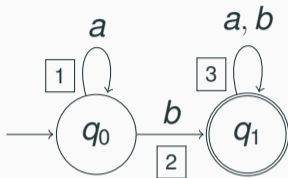


Généralisation des PPO - Phase d'initialisation



- Chaque arc a_i est numéroté selon leur ordre d'apparition.

Généralisation des PPO - Phase d'initialisation

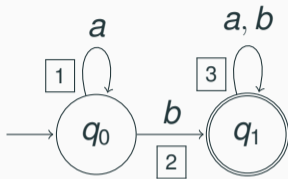


- Chaque arc a_i est numéroté selon leur ordre d'apparition.
- Chaque agent commence avec l'ensemble des étiquettes ayant sa lettre présente sur l'arc.

$$a \Rightarrow 1, 3$$

$$b \Rightarrow 2, 3$$

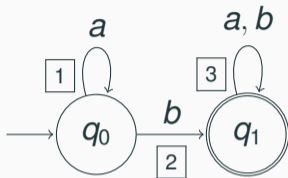
Généralisation des PPO - Phase d'initialisation



Phase d'initialisation :



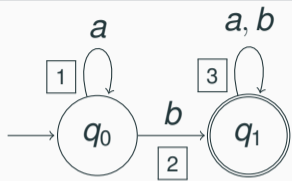
Généralisation des PPO - Phase d'initialisation



Phase d'initialisation :



Généralisation des PPO - Règles



- On suppose que chaque agent joue l'étiquette la plus petite possible.

13

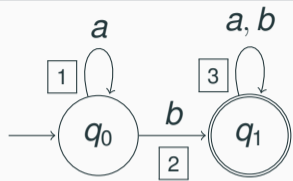
23

13

13

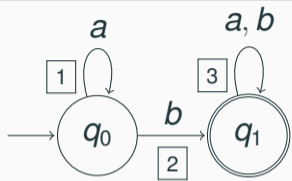
23

Généralisation des PPO - Règles



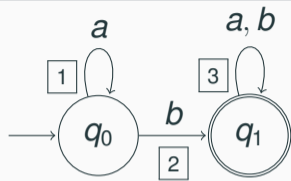
- On suppose que chaque agent joue l'étiquette la plus petite possible.
- Si l'agent à gauche a une étiquette plus grande, on supprime nos étiquettes plus petites.

Généralisation des PPO - Règles

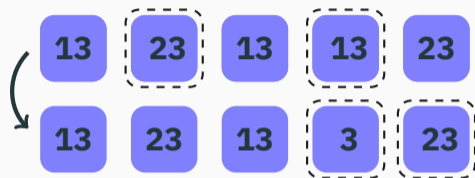


- On suppose que chaque agent joue l'étiquette la plus petite possible.
- Si l'agent à gauche a une étiquette plus grande, on supprime nos étiquettes plus petites.

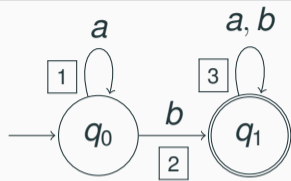
Généralisation des PPO - Règles



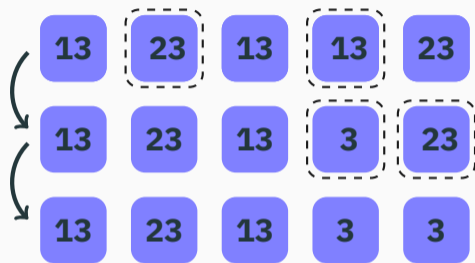
- On suppose que chaque agent joue l'étiquette la plus petite possible.
- Si l'agent à gauche a une étiquette plus grande, on supprime nos étiquettes plus petites.



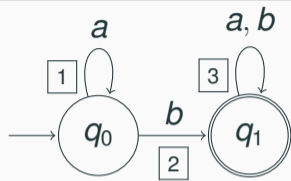
Généralisation des PPO - Règles



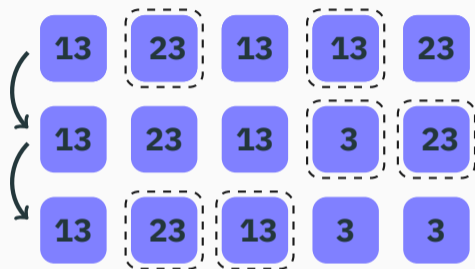
- On suppose que chaque agent joue l'étiquette la plus petite possible.
- Si l'agent à gauche a une étiquette plus grande, on supprime nos étiquettes plus petites.



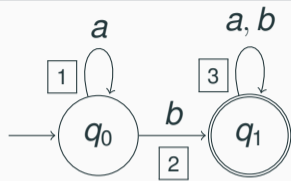
Généralisation des PPO - Règles



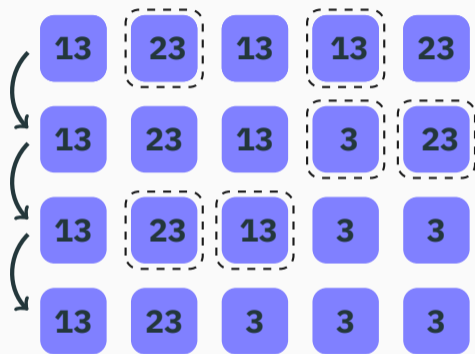
- On suppose que chaque agent joue l'étiquette la plus petite possible.
- Si l'agent à gauche a une étiquette plus grande, on supprime nos étiquettes plus petites.



Généralisation des PPO - Règles



- On suppose que chaque agent joue l'étiquette la plus petite possible.
- Si l'agent à gauche a une étiquette plus grande, on supprime nos étiquettes plus petites.



Généralisation des PPO - Règles

Quoi faire si la population ne converge pas vers vrai?

Généralisation des PPO - Règles

Quoi faire si la population ne converge pas vers vrai?

Si un agent a un ensemble vide, il propage une erreur (\perp).

Généralisation des PPO - Règles

Quoi faire si la population ne converge pas vers vrai?

Règles :

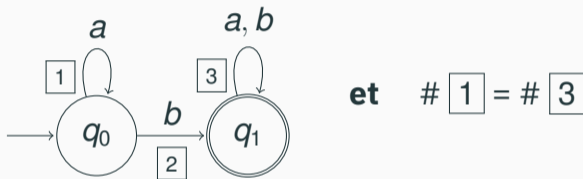
$$\alpha, \beta \xrightarrow{\leq} \alpha, \beta' \quad \text{où } \beta' = \begin{cases} \beta \setminus [1, \dots, x] & \text{si } x \notin \alpha, \\ \beta \setminus [1, \dots, x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\text{et } x = \min(\alpha)$$

$$\alpha, \beta \longrightarrow \perp, \perp \quad \text{si } \beta = \emptyset$$

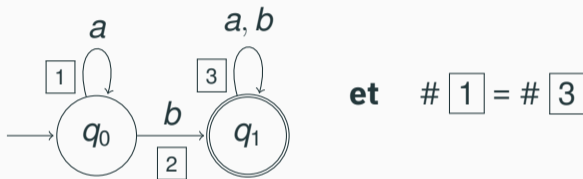
Contraintes sur les transitions

Comment savoir si les agents valident l'automate **et** un ensemble de contraintes sur les transitions?



Contraintes sur les transitions

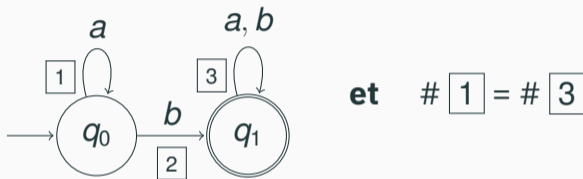
Comment savoir si les agents valident l'automate **et** un ensemble de contraintes sur les transitions?



\Rightarrow mélanger la robustesse et les protocoles ordonnés.

Contraintes sur les transitions

Comment savoir si les agents valident l'automate **et** un ensemble de contraintes sur les transitions?



⇒ mélanger la robustesse et les protocoles ordonnés.

Chaque agent joue les deux protocoles ;

Lors du retrait d'étiquettes, l'agent change d'état initial dans le protocole de vérification des contraintes.

En résumé :

- Protocoles de population :
 - Caractérisation des protocoles,
 - Robustesse des protocoles,
 - Population ordonnée,
 - Contrainte sur les transitions.

Questions ouvertes :

- Caractérisation des protocoles sur les mots,
- Robustesse des protocoles IO.

MERCI!